



## IEL – protokol k projektu

Roman Nečas  
xnecasr00

14. decembra 2023

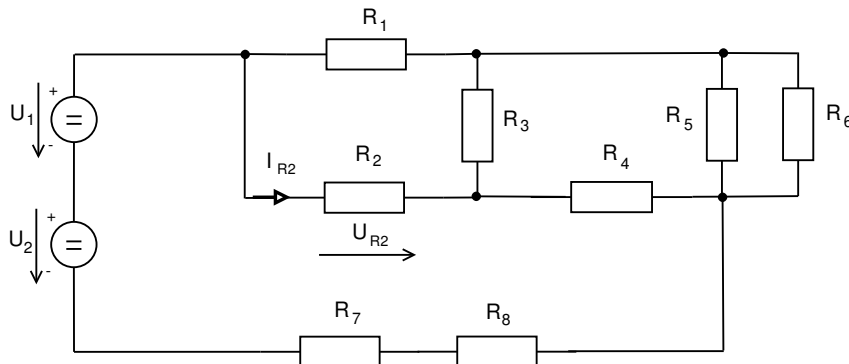
### Obsah

1	Príklad 1	2
2	Príklad 2	6
3	Príklad 3	8
4	Príklad 4	11
5	Príklad 5	14
6	Shrnutí výsledků	17

# Príklad 1

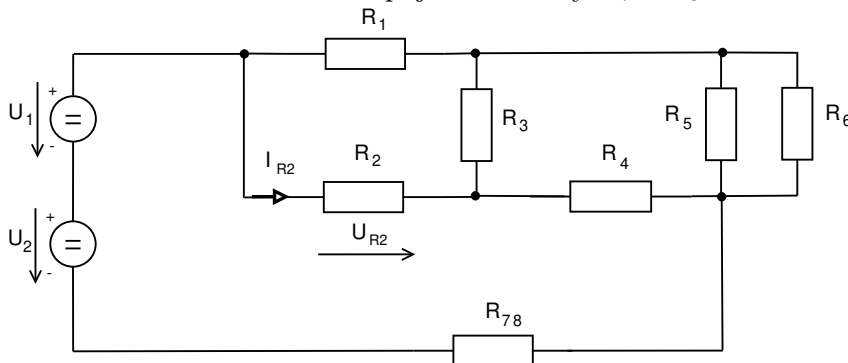
Stanovte napätí  $U_{R2}$  a prúd  $I_{R2}$ . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]	$R_7$ [ $\Omega$ ]	$R_8$ [ $\Omega$ ]
C	100	80	450	810	190	220	220	720	260	180



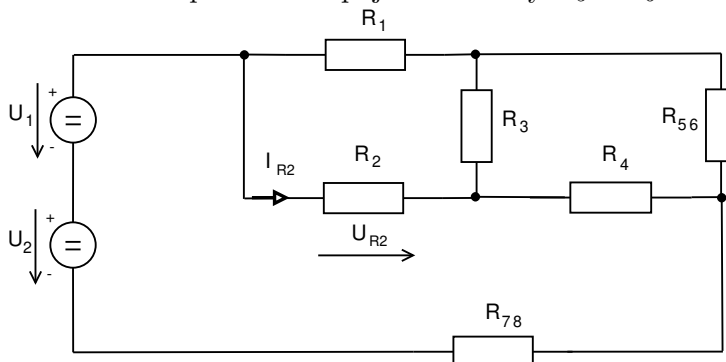
## Riešenie:

1. Sčítame sériovo zapojené rezistory  $R_7$  a  $R_8$ .



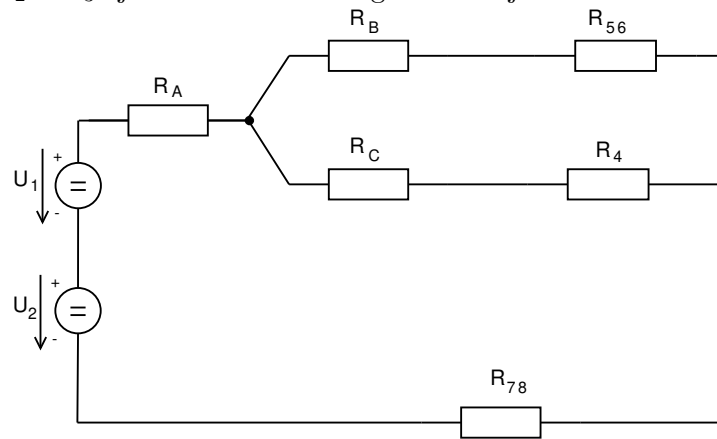
$$R_{78} = R_7 + R_8 = 260 + 180 = 440\Omega$$

2. Sčítame paralelne zapojené rezistory  $R_5$  a  $R_6$ .



$$R_{56} = \frac{R_5 \times R_6}{R_5 + R_6} = \frac{220 \times 720}{220 + 720} = \frac{7920}{47} \approx 168,5106\Omega$$

3. Rezistory  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$  zjednodušíme z konfigurácie trojuholník na konfiguráciu hviezda.

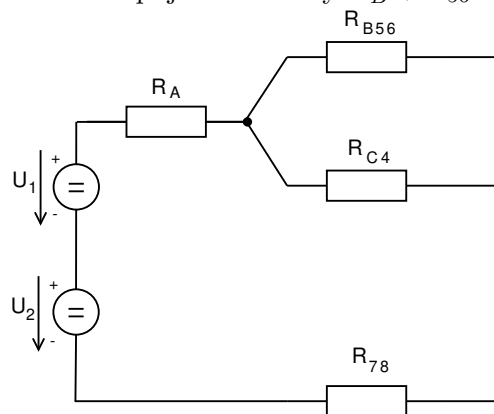


$$R_A = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{450 \times 810}{450 + 810 + 190} = \frac{7290}{29} \approx 251,3793\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{450 \times 190}{450 + 810 + 190} = \frac{1710}{29} \approx 58,9655\Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{810 \times 190}{450 + 810 + 190} = \frac{3078}{29} \approx 106,1379\Omega$$

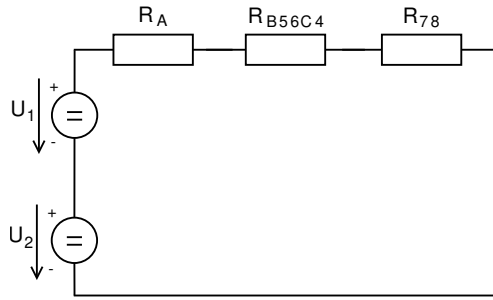
4. Sčítame sériovo zapojené rezistory  $R_B + R_{56}$  a  $R_C + R_4$ .



$$R_{B56} = R_B + R_{56} = \frac{1710}{29} + \frac{7920}{47} = \frac{310050}{1363} \approx 227,4762\Omega$$

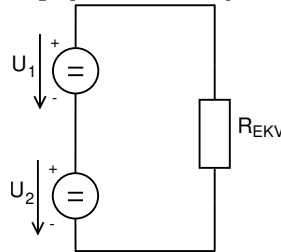
$$R_{C4} = R_C + R_4 = \frac{3078}{29} + 220 = \frac{9458}{29} \approx 326,1379\Omega$$

5. Sčítame paralelne zapojené rezistory  $R_{B56}$  a  $R_{C4}$ .



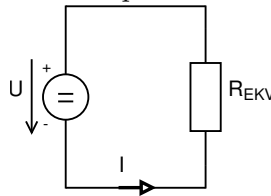
$$R_{B56C4} = \frac{R_{B56} \times R_{C4}}{R_{B56} + R_{C4}} = \frac{\frac{310020}{1363} \times \frac{9458}{29}}{\frac{310020}{1363} + \frac{9458}{29}} = \frac{733113225}{5470676} \approx 134,0078\Omega$$

6. Sčítame sériovo zapojené rezistory  $R_A$ ,  $R_{B56C4}$  a  $R_{78}$ .



$$R_{EKV} = R_A + R_{B56C4} + R_{78} = \frac{7290}{29} + \frac{733113225}{5470676} + 440 = \frac{155704325}{188644} \approx 825,3871\Omega$$

7. Sčítame napätia  $U_1$  a  $U_2$ .



$$U = U_1 + U_2 = 100 + 80 = 180V$$

8. Vypočítame prúd  $I$ .

$$I = \frac{U}{R_{EKV}} = \frac{180}{\frac{155704325}{188644}} = \frac{6791184}{31140865} \approx 218,0795mA$$

9. Vypočítame napätie na  $R_{B56C4}$ .

$$U_{RB56C4} = I \times R_{B56C4} = \frac{6791184}{31140865} \times \frac{733113225}{5470676} \approx 29,2244V$$

10. V paralelnom zapojení je napätie rovnaké pre všetky vetvy, a preto platí:

$$U_{RB56C4} = U_{RB56} = U_{RC4}$$

11. Vypočítame  $I_{RC4}$ .

$$I_{RC4} = \frac{U_{RC4}}{R_{C4}} = \frac{29,2244}{\frac{9458}{29}} \approx 89,6073mA$$

12. Určíme napätie na  $R_C$ .

$$U_{RC} = I_{RC4} \times R_{C4} = 0,0896073 \times \frac{3078}{29} \approx 9,5107V$$

13. Z rekonfigurácie hviezdy na trojuholník vieme, že  $U_{R2} = U_{RA} + U_{RC}$ , a preto musíme ešte dopočítať  $U_{RA}$ .

$$U_{RA} = I \times R_A = 0,2180795 \times \frac{7290}{29} \approx 54,8207V$$

14. Dosadíme do vzorca.

$$U_{R2} = U_{RA} + U_{RC} \approx 54,8207 + 9,5107 \approx 64,3314V$$

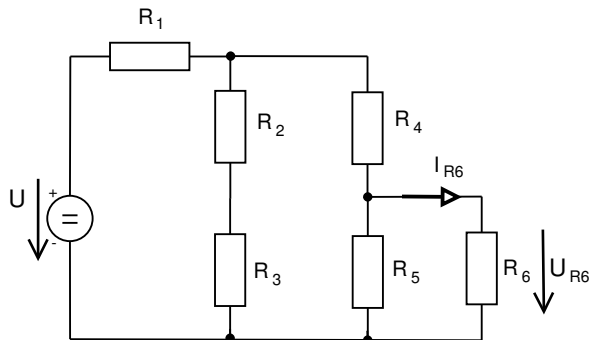
15. Dopočítame  $I_{R2}$ .

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} \approx \frac{64,3314}{810} \approx 79,4215mA$$

## Príklad 2

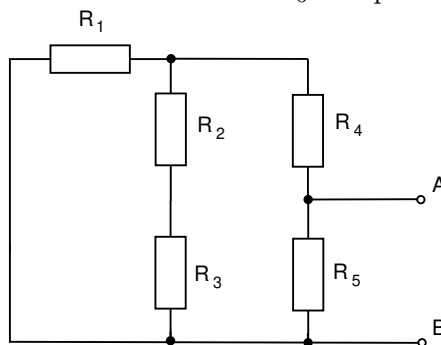
Stanovte napätí  $U_{R6}$  a prúd  $I_{R6}$ . Použijte metodu Théveninovy vety.

sk.	$U$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]
H	220	190	360	580	205	560	250

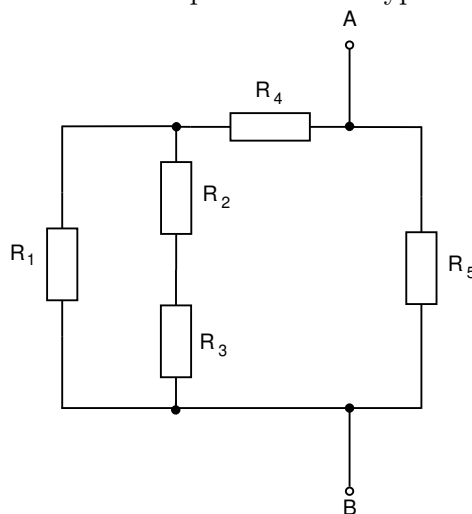


## Riešenie:

- Podľa Théveninovej vety prekreslíme obvod bez  $R_6$  a napätový zdroj nahradíme skratom.



- Obvod ekvivalentne prekreslíme a vypočítame  $R_i$



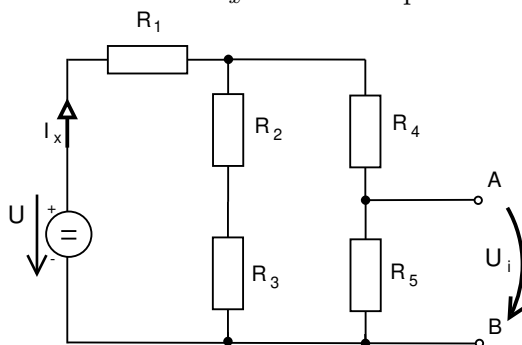
$$R_{23} = R_2 + R_3 = 360 + 580 = 940\Omega$$

$$R_{123} = \frac{R_1 \times R_{23}}{R_1 + R_{23}} = \frac{190 \times 940}{190 + 940} = \frac{17860}{113} \approx 158,0531\Omega$$

$$R_{1234} = R_{123} + R_4 = \frac{17860}{113} + 205 = \frac{41025}{113} \approx 363,0531\Omega$$

$$R_i = \frac{R_{1234} \times R_5}{R_{1234} + R_5} = \frac{\frac{41025}{113} \times 560}{\frac{41025}{113} + 560} \approx 220,2579\Omega$$

3. Vypočítame  $R_{EKV}$ , aby sme sa dostali k  $I_x$  a určíme napätie medzi bodmi A a B, teda  $U_i$ .



$$R_{EKV} = R_1 + \frac{(R_2 + R_3) \times (R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 190 + \frac{(360 + 580) \times (205 + 560)}{360 + 580 + 205 + 560} \approx 611,7595\Omega$$

$$I_x = \frac{U}{R_{EKV}} = \frac{220}{611,7595} \approx 359,6184mA$$

Teraz musíme vypočítať prúd  $I_{R5}$ , aby sme mohli zistiť  $U_i$ .

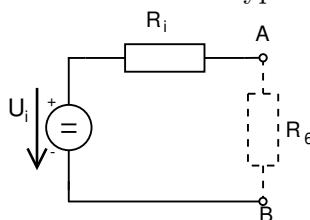
$$I_{R45} = I_{R5}$$

$$I_{R5} = \frac{U_{R45}}{R_{45}} = \frac{U - (I_x \times R_1)}{R_4 + R_5} = \frac{220 - (0,3596 \times 190)}{205 + 560} \approx 198,2647mA$$

4. Dosadíme do Ohmovho zákona a zistíme  $U_i$ .

$$U_i = R_5 \times I_{R5} \approx 560 \times 0,1982647 \approx 111,0282V$$

5. Pomocou ekvivalentného obvodu vypočítame  $I_{R6}$  a  $U_{R6}$ .



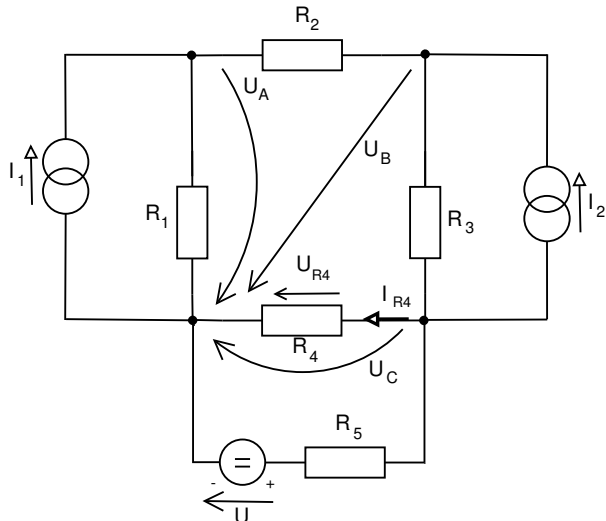
$$I_{R6} = \frac{U_i}{R_i + R_6} \approx \frac{111,0282}{220,2579 + 250} \approx 236,1007mA$$

$$U_{R6} = R_6 \times I_{R6} \approx 250 \times 0,2361007 \approx 59,0252V$$

### Príklad 3

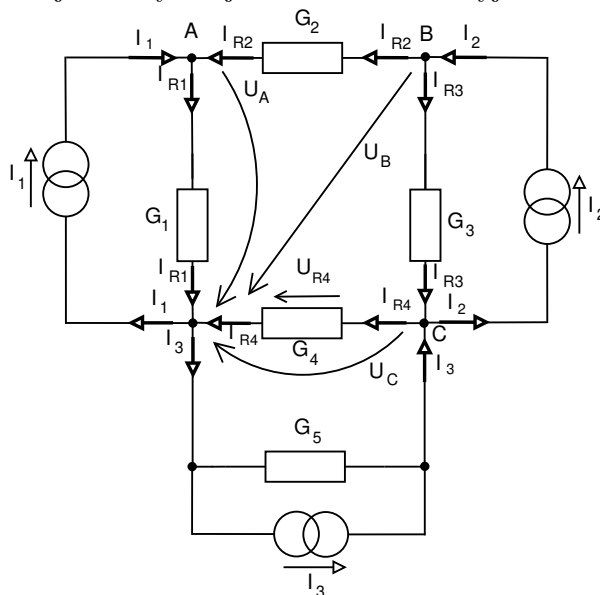
Stanovte napätí  $U_{R4}$  a prúd  $I_{R4}$ . Použite metodu uzlových napätí ( $U_A, U_B, U_C$ ).

sk.	$U$ [V]	$I_1$ [A]	$I_2$ [A]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]
H	130	0.95	0.50	47	39	58	28	25



### Riešenie:

1. Napätový zdroj  $U$  nahradíme prúdovým zdrojom  $I_3$ , vyznačíme uzly  $A, B$  a  $C$ , naznačíme prúdy vtekajúce a vytekajúce do a z uzlov. Vyjadríme vodivosť.



$$I_3 = \frac{U}{R_5} = \frac{130}{25} = 5,2A$$

$$G = \frac{1}{R}S$$

2. Podľa 1. Kirchhoffovho zákona pre uzol  $A$  platí:

$$I_1 = -I_{R2} + I_{R1}$$

Vyjadríme  $I_{R2}$ .

$$I_{R2} = U_{G2} \times G_2$$

Podľa 2. Kirchhoffovho zákona pre  $U_{G2}$  platí:

$$U_{G2} = -U_A + U_B$$

A teda:

$$I_{R2} = (-U_A + U_B) \times G_2$$

Vyjadríme ešte  $I_{R2}$ .

$$I_{R2} = U_A \times G_1$$

Dosadíme do pôvodnej rovnice pre  $I_1$ .

$$I_1 = U_A \times (G_1 + G_2) + U_B \times (-G_2)$$

3. Obdobne postupujeme pre uzol  $B$  a  $C$ , teda pre uzol  $B$  platí:

$$I_2 = I_{R2} + I_{R3}$$

$$I_{R2} = (-U_A + U_B) \times G_2$$

$$I_{R3} = U_{G3} \times G_3 = (-U_C + U_B) \times G_3$$

$$I_2 = U_A \times (-G_2) + U_B \times (G_2 + G_3) + U_C \times (-G_3)$$

4. Pre uzol  $C$  platí:

$$I_3 = -I_{R3} + I_{R4} + I_2$$

$$I_{R3} = U_{G3} \times G_3 = (-U_C + U_B) \times G_3$$

$$I_{R4} = U_C \times G_4 + U_C \times G_4$$

$$I_2 = U_A \times (-G_2) + U_B \times (G_2 + G_3) + U_C \times (-G_3)$$

$$I_3 = U_A \times (-G_2) + U_B \times G_2 + U_C \times (G_4 + G_5)$$

5. Zapišeme rovnicu pre každý uzol.

$$A : U_A \times (G_1 + G_2) + U_B \times (-G_2) + U_C \times 0 = I_1$$

$$B : U_A \times (-G_2) + U_B \times (G_2 + G_3) + U_C \times (-G_3) = I_2$$

$$C : U_A \times (-G_2) + U_B \times G_2 + U_C \times (G_4 + G_5) = I_3$$

6. Rovnice vyjadríme v maticovom tvare a počítame Cramerovým a Sarusovým pravidlom.

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_2 & G_2 & G_4 + G_5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{47} + \frac{1}{39} & -\frac{1}{39} & 0 \\ -\frac{1}{39} & \frac{1}{39} + \frac{1}{58} & -\frac{1}{58} \\ -\frac{1}{39} & \frac{1}{39} & \frac{1}{28} + \frac{1}{25} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,5 \\ 5,2 \end{pmatrix}$$

7. Dostávame:

$$U_A \approx 60,5040V$$

$$U_B \approx 73,6595V$$

$$U_C \approx 64,2241V$$

8. Vidíme, že platí:  $U_{R4} = U_C$  a teda stačí dopočítať  $I_{R4}$ .

$$U_{R4} \approx 64,2241V$$

$$I_{R4} = \frac{U_{R4}}{R_4} \approx 2,2937A$$

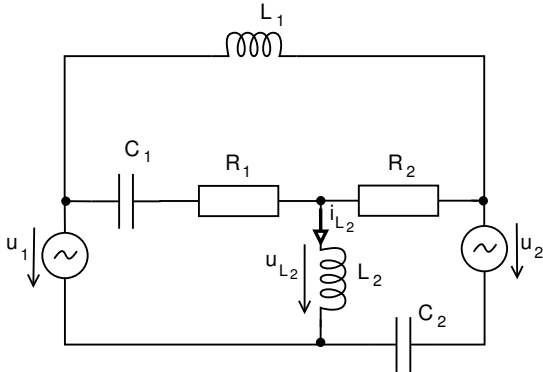
## Príklad 4

Pro napájecí napětí platí:  $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$ ,  $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$ .

Ve vztahu pro napětí  $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$  určete  $|U_{L_2}|$  a  $\varphi_{L_2}$ . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ( $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ).

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$L_1$ [mH]	$L_2$ [mH]	$C_1$ [ $\mu$ F]	$C_2$ [ $\mu$ F]	$f$ [Hz]
C	3	4	10	13	220	70	230	85	75



## Riešenie:

1. Určíme si uhlovú rýchlosť  $\omega$ :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 75 = 150\pi$$

2. Určíme impedancie na cievkach a kondenzátoroch.

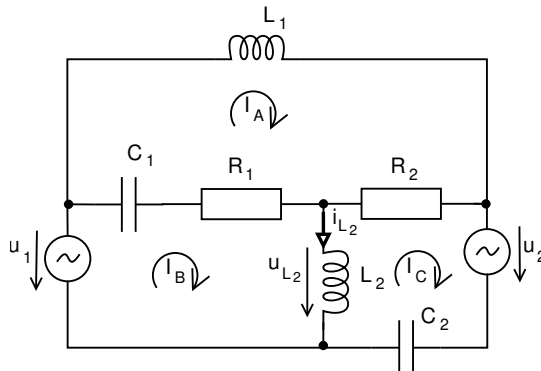
$$Z_{L1} = j\omega L_1 = j33\pi \Omega$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2 = j\frac{21}{2}\pi \Omega$$

$$Z_{C1} = \frac{-j}{\omega C_1} = \frac{-j}{\frac{69}{2}\pi} = \frac{-2j}{69\pi} \Omega$$

$$Z_{C2} = \frac{-j}{\omega C_2} = \frac{-j}{\frac{51}{4}\pi} = \frac{-4j}{51\pi} \Omega$$

3. Zostavíme rovnice pre slučkové prúdy.



4. Pre slučku  $I_A$  podľa 2. Kirchhoffovho zákona platí:

$$U_{L1} + U_{C1} + U_{R1} + U_{R2} = 0$$

5. Z Ohmovho zákona vyjadríme napätia:

$$I_A \times (Z_{L1} + Z_{C1} + R_1 + R_2) - I_B \times (Z_{C1} + R_1) - I_C \times R_2 = 0$$

6. Obdobne postupujeme aj pre slučku  $I_B$ .

$$-I_A \times (Z_{C1} + R_1) + I_B \times (Z_{C1} + R_1 + Z_{L2}) - I_C \times Z_{L2} = U_1$$

7. A pre slučku  $I_C$  platí:

$$-I_A \times R_2 - I_B \times Z_{L1} + I_C \times (Z_{L2} + Z_{C2} + R_2) = -U_2$$

8. Pre estetickosť môžeme vynásobiť  $-1$ .

$$I_A \times R_2 + I_B \times Z_{L1} - I_C \times (Z_{L2} + Z_{C2} + R_2) = U_2$$

9. Teda pre všetky slučky platí:

$$I_A : I_A \times (Z_{L1} + Z_{C1} + R_1 + R_2) - I_B \times (Z_{C1} + R_1) - I_C \times R_2 = 0$$

$$I_B : -I_A \times (Z_{C1} + R_1) + I_B \times (Z_{C1} + R_1 + Z_{L2}) - I_C \times Z_{L2} = U_1$$

$$I_C : I_A \times R_2 + I_B \times Z_{L1} - I_C \times (Z_{L2} + Z_{C2} + R_2) = U_2$$

10. Rovnice prevedieme do matice.

$$\begin{pmatrix} Z_{L1} + Z_{C1} + R_1 + R_2 & -Z_{C1} - R_1 & -R_2 \\ -Z_{C1} - R_1 & Z_{C1} + R_1 + Z_{L2} & -Z_{L2} \\ R_2 & Z_{L2} & -Z_{L2} - Z_{C2} - R_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

11. Dosadíme a počítame Sarusovým a Cramerovým pravidlom:

$$\begin{pmatrix} j33\pi + \frac{-2j}{69\pi} + 10 + 13 & -\frac{-2j}{69\pi} - 10 & -13 \\ -\frac{-2j}{69\pi} - 10 & \frac{-2j}{69\pi} + 10 + j\frac{21}{2}\pi & -j\frac{21}{2}\pi \\ 13 & j\frac{21}{2}\pi & -j\frac{21}{2}\pi - \frac{-4j}{51\pi} - 13 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

12. Dostávame:

$$I_A = -0,01080290 + 0,01451527j \text{ A}$$

$$I_B = -0,00865979 - 0,10292173j \text{ A}$$

$$I_C = -0,04486051 + 0,02022134j \text{ A}$$

13. Pre  $I_{L2}$  platí:

$$I_{L2} = I_B - I_C$$

14. A teda podľa Ohmovho zákona pre  $U_{L2}$  platí:

$$U_{L2} = (I_B - I_C) \times Z_{L2}$$

15. Dosadíme:

$$U_{L2} = (0,03620072 - 0,12314308j) \times j \frac{21}{2} \pi$$

$$U_{L2} = 4,06208661 + 1,19414322j \text{ V}$$

16. Dostávame:

$$|U_{L2}| = \sqrt{\operatorname{Re}(U_{L2})^2 + \operatorname{Im}(U_{L2})^2} \approx \sqrt{16,50054762 + 1,42597803} \text{ V}$$

$$|U_{L2}| \approx 4,2340 \text{ V}$$

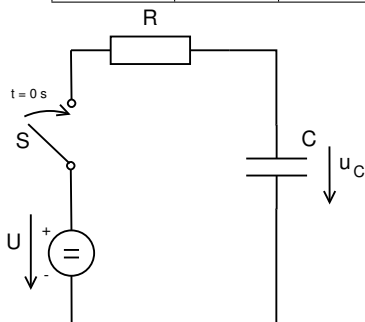
17. Na koniec dopočítame fázový posun  $\varphi_{L2}$ .

$$\varphi_{L2} = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(U_{L2})}{\operatorname{Re}(U_{L2})}\right) \approx \arctan\left(\frac{1,19414322}{4,06208661}\right) \approx 0,28591818 \text{ rad} \approx 16,3819^\circ$$

## Príklad 5

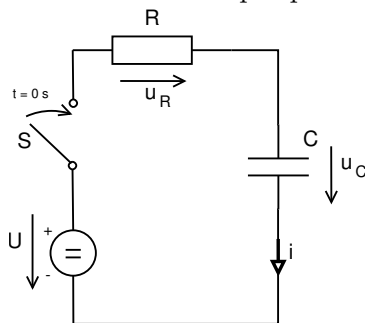
V obvode na obrázku níže v čase  $t = 0$  [s] sepne spínač  $S$ . Sestavte diferenciálnu rovnicu popisujúcu chovávanie obvodu na obrázku, ďalej ju upravte dosadením hodnôt parametrov. Vypočítajte analytické riešenie  $u_C = f(t)$ . Provedte kontrolu výpočtu dosadením do sestavenej diferenciálnej rovnice.

sk.	$U$ [V]	$C$ [F]	$R$ [ $\Omega$ ]	$u_C(0)$ [V]
H	18	2	200	3



## Riešenie:

1. Zostavíme rovnicu pre prúd  $i$ :



$$i = \frac{u_R}{R}$$

2. Z 2. Kirchhoffovho zákona zostavíme rovnicu pre  $U$ .

$$U = u_r + u_c$$

3. Ďalej platia nasledujúce axiómy:

$$u'_c = \frac{i}{C}$$

$$u_c(0) = u_{cp}$$

4. Dosadíme 1. rovnicu do 3.

$$u'_c = \frac{u_R}{C \times R}$$

5. Dosadíme za  $u_R$ .

$$u'_c = \frac{U - u_c}{R \times C} = \frac{18 - 3}{200 \times 2} = \frac{15}{400} = \frac{3}{80}$$

6. Zostavíme diferenciálnu rovnicu, pri podmienke  $u_c(0) = u_{cp}$ .

$$u'_c + \frac{u_c}{R \times C} = \frac{U}{R \times C}$$

7. Zostavíme charakteristickú rovnicu.

$$\lambda + \frac{1}{R \times C} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{R \times C}$$

$$\lambda = -\frac{1}{400}$$

8. Očakávané riešenie:

$$u_c(t) = K(t)e^{\lambda \times t} = K(t)e^{-\frac{t}{RC}} = K(t)e^{-\frac{t}{400}}$$

$$u'_c = K'_t$$

9. Zderivujeme  $u_c(t)$ .

$$u'_c(t) = K'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{K(t)e^{-\frac{t}{RC}}}{RC}$$

10. Dosadíme  $u_c$  a  $u'_c$  do  $u'_c + \frac{u_c}{R \times C} = \frac{U}{R \times C}$

$$K'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{K(t)e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} + \frac{K(t)e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} = \frac{U}{RC}$$

$$K'(t)e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{RC}$$

$$K'(t) = \frac{U}{RC} \times e^{\frac{t}{RC}}$$

$$K'(t) = \frac{18}{400} \times e^{\frac{t}{400}}$$

11. Rovnicu zintegrujeme.

$$K(t) = Ue^{\frac{t}{RC}} + k$$

$$K(t) = 18e^{\frac{t}{400}} + k$$

12. Dosadíme do očakávaného riešenia:

$$u_c(t) = (Ue^{\frac{t}{RC}} + k) \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_c(t) = U + k e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_c(t) = 18 + k e^{-\frac{t}{400}}$$

13. Dosadíme do podmienky  $u_c(0) = u_{cp} = 3V$  a vypočítame  $k$ .

$$u_{cp} = U + k e^0$$

$$k = u_{cp} - U$$

$$k = 3 - 18 = -15$$

14. Analytické riešenie:

$$u_c(t) = U + (u_{cp} - U)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_c(t) = 18 - 15e^{-\frac{t}{400}}$$

## Kontrola:

1. Vyjadríme  $u'_c$ .

$$u_c(t) = 18 - 15e^{-\frac{t}{400}}$$

$$u'_c + \frac{u_c}{R \times C} = \frac{U}{R \times C}$$

$$u'_c + \frac{18 - 15e^{-\frac{t}{400}}}{200 \times 2} = \frac{18}{200 \times 2}$$

$$u'_c = -\frac{18 - 15e^{-\frac{t}{400}}}{400} + \frac{18}{400}$$

2. Dosadíme do zostavenej diferenciálnej rovnice.

$$u'_c + \frac{u_c}{R \times C} = \frac{U}{R \times C}$$

$$-\frac{18 - 15e^{-\frac{t}{400}}}{400} + \frac{18}{400} + \frac{18 - 15e^{-\frac{t}{400}}}{200 \times 2} = \frac{18}{200 \times 2}$$

$$-\frac{18 - 15e^{-\frac{t}{400}}}{400} + \frac{18}{400} + \frac{18 - 15e^{-\frac{t}{400}}}{400} = \frac{18}{400}$$

$$\frac{18}{400} = \frac{18}{400}$$

## Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	C	$U_{R2} = 64,3314V$ $I_{R2} = 79,4215mA$
2	H	$U_{R6} = 59,0252V$ $I_{R6} = 236,1007mA$
3	H	$U_{R4} = 64,2241V$ $I_{R4} = 2,2937A$
4	C	$ U_{L2}  = 4,2340V$ $\varphi_{L2} = 16,3819^\circ$
5	H	$u_C(t) = 18 - 15e^{-\frac{t}{400}}$